

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 26 SETTEMBRE 2012

- (1) Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura finito. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili su X , non negative, quasi ovunque finite e tali che $f_n \rightarrow 0$ in misura. Si ponga

$$g_n(x) = \min \{f_n(x), 1\} \quad \forall x \in X .$$

Provare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu = 0 .$$

- (2) Si ponga $\mathbb{R}_+^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u, v > 0\}$. Sia g misurabile su \mathbb{R}_+^2 . Si ponga

$$f(x, y) = g(e^{2x+y}, e^{x+y})e^{3x+2y}, \quad \text{per ogni } (x, y) \in \mathbb{R}^2 .$$

Provare che se f è integrabile su \mathbb{R}^2 allora g è integrabile su \mathbb{R}_+^2 .

- (3) Sia I_n l'intervallo aperto in \mathbb{R} di estremi $(-1)^n n, (-1)^n n^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Si ponga

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + |x|^\pi} \chi_{I_n}(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} .$$

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx .$$